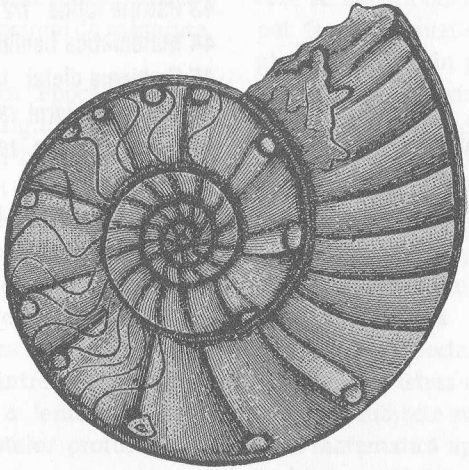
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

50 DE IDEI

PE CARE TREBUIE SA LE CUNOȘTI

MATEMATICĂ

Tony Crilly



LITERA®
BUCUREȘTI, 2017

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Cuprins

Introducere 3

01 Zero 4
02 Sisteme de numerație 8
03 Fracții 12
04 Pătrate și rădăcini pătrate 16
05 π 20
06 e 24
07 Infinitul 28
08 Numere imaginare 32
09 Numere prime 36
10 Numere perfecte 40
11 Numere Fibonacci 44
12 Dreptunghiuri de aur 48
13 Triunghiul lui Pascal 52
14 Algebra 56
15 Algoritmul lui Euclid 60
16 Logica 64
17 Demonstrația 68
18 Mulțimi 72
19 Calcul diferențial și integral 76
20 Construcții 80
21 Triunghiuri 84
22 Curbe 88
23 Topologie 92
24 Dimensiune 96
25 Fractali 100
26 Haos 104
27 Postulatul paralelelor 108
28 Geometrie discretă 112
29 Grafuri 116
30 Problema celor patru culori 120
31 Probabilitate 124
32 Teoria lui Bayes 128
33 Problema zilei de naștere 132
34 Distribuții 136
35 Curbă normală 140
36 Legătura dintre date 144
37 Genetică 148
38 Grupuri 152
39 Matrici 156
40 Coduri 160
41 Aritmetică avansată 164
42 Pătrate magice 168
43 Pătrate latine 172
44 Matematica banilor 176
45 Problema dietei 180
46 Comis-voiajorul 184
47 Teoria jocurilor 188
48 Relativitate 192
49 Ultima teoremă a lui Fermat 196
50 Ipoteza Riemann 200

Glosar 204
Indice 206

01 Zero

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

În lumea numerelor intrăm cu pași nesiguri, de la o vârstă fragedă. Învățăm că 1 este primul din „alfabetul numerelor" și că el introduce numerele naturale 1, 2, 3, 4, 5... Numerele naturale sunt cele care numără lucruri reale – mere, portocale, banane, pere. Abia mai târziu învățăm să numărăm și merele dintr-o cutie în care nu este nici un măr.

Până și grecii din Antichitate, care au adus progrese însemnate științelor și matematicii, sau romanii, renumiți pentru realizările lor inginerești, erau lipsiți de o modalitate efectivă de a trata subiectul numărului de mere dintr-o cutie goală. Ei nu au reușit să dea „nimicului" un nume. Romanii aveau modul lor de a combina I, V, X, L, C, D și M, dar unde era 0? Ei nu numărau „nimicul".

CUM A FOST ACCEPTAT ZERO?

Se crede că folosirea unui simbol care să desemneze „nimicul" își are originea cu mii de ani în urmă. Civilizația Maya, din ceea ce este astăzi Mexic, folosea zero în diferite forme. Puțin mai târziu, astronomul Claudius Ptolemeu, sub influența babilonienilor, a folosit un simbol înrudit cu 0 modern, ca să ocupe locul gol din sistemul său numeric. Ca ocupant al locului gol, zero putea fi folosit, de exemplu, pentru a face distincția între 75 și 705 (în notația modernă), în loc de a se baza pe context, cum procedau babilonienii. Acest lucru poate fi comparat cu introducerea virgulei în scriere – ambele ajută la citirea înțelesului corect. Dar, la fel cum virgula vine cu un set de reguli de utilizare, era nevoie de reguli și pentru folosirea lui zero.

În secolul al VII-lea, matematicianul indian Brahmagupta îl considera pe zero ca pe un „număr", nu doar un substituent, o umplutură a unui loc gol, și a stabilit reguli pentru folosirea lui. Acestea erau „suma dintre un număr pozitiv și zero este un număr pozitiv" și „suma dintre zero și zero este zero". Gândindu-se la zero mai degrabă ca la un număr decât ca la un substituent, Brahmagupta era destul de revoluționar. Sistemul de numerație indo-arab, care îl includea pe zero, a fost promovat în Occident de Leonardo din Pisa – Fibonacci – în lucrarea sa *Liber Abaci (Cartea numărării)*, publicată pentru prima dată în 1202. Crescut în nordul Africii și familiarizat din școală cu aritmetica

CRONOLOGIE

700 î.Hr.
Babilonienii folosesc zero ca substituent pentru locul gol din sistemul lor numeric.

628 d.Hr.
Brahmagupta folosește zero și enunță reguli pentru folosirea lui cu alte numere.

830
Mahavira enunță idei despre modul în care zero

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

indo-arabă, el a recunoscut forța folosirii simbolului suplimentar 0, în combinație cu simbolurile hinduse 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9.

Introducerea lui zero în sistemul de numerație a pus o problemă de care Brahmagupta s-a ocupat doar în trecere: cum trebuia tratat acest „intrus"? El a făcut începutul, dar recomandările lui erau vagi. Cum putea fi integrat zero în sistemul existent al aritmeticii de o manieră mai precisă? Unele ajustări au venit imediat. Când era vorba despre adunare și despre înmulțire, 0 funcționa perfect, dar operațiunile de scădere și de împărțire nu se împăcau prea ușor cu „intrusul". Era nevoie de precizări de conținut, pentru ca 0 să se armonizeze cu restul aritmeticii acceptate.

CUM FUNCȚIONEAZĂ ZERO?

Adunarea și înmulțirea cu zero sunt clare și fără controverse – poți adăuga 0 la 10 ca să obții 100, dar ne vom referi la „adunare" în sensul mai puțin imaginativ al operațiunii numerice. Adunarea lui 0 la un număr lasă acel număr neschimbat, pe când înmulțirea lui 0 cu orice număr dă întotdeauna rezultatul 0. De exemplu, avem $7 + 0 = 7$ și $7 \times 0 = 0$. Scăderea este o operațiune simplă, dar poate duce la numere negative, $7 - 0 = 7$ și $0 - 7 = -7$. Împărțirea la zero ridică însă dificultăți.

Să ne imaginăm că măsurăm o lungime cu ajutorul unei rigle. Să presupunem că rigla are 7 unități de lungime. Ne interesează de câte ori putem așeza rigla noastră pe lungimea dată. Dacă lungimea care trebuie măsurată este 28, răspunsul este 28 împărțit la 7 sau, în simboluri, $28 \div 7 = 4$. O notație mai bună pentru a exprima această împărțire este

$$\frac{28}{7} = 4$$

și apoi putem face proba scriind aceasta în termeni de multiplicare, ca fiind $28 = 7 \times 4$. Cum procedăm însă când avem de împărțit 0 la 7? Pentru a facilita găsirea unui răspuns, să denumim rezultatul *a*, astfel încât

$$\frac{0}{7} = a$$

Înmulțind pe diagonală, aceasta este echivalent cu $0=7\times a$. Dacă așa stau lucrurile, singura valoare posibilă pentru *a* este 0, pentru că, dacă rezultatul înmulțirii

1100

Bhaskara folosește 0 ca simbol în algebră și încearcă să arate cum se lucrează cu acesta.

1202

Fibonacci folosește simbolul suplimentar 0 adăugat la sistemul indo-arab de numere 1,...,9, dar nu ca pe un număr echivalent cu acestea.

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

a două numere este 0, atunci unul din ele trebuie să fie 0. Cu siguranță nu este 7, așa că trebuie să fie un zero.

Aceasta nu este principala dificultate în ceea ce îl privește pe zero. Punctul critic este împărțirea la 0. Dacă încercăm să tratăm 7/0 la fel cum am procedat cu 0/7, am avea ecuația

$$\frac{7}{0} = b$$

Prin înmulțire pe diagonală, $0 \times b = 7$ și ajungem la nonsensul că $0 = 7$. Dacă admitem posibilitatea ca 7/0 să fie un număr, ajungem la o confuzie numerică pe scară mare. Ieșirea din această situație constă în a spune că 7/0 este nedefinit. Nu este posibil să extragem un sens din împărțirea lui 7 (sau a oricărui alt număr care nu este zero) la zero și, pur și simplu, nu permitem această operațiune. La fel cum nu este permis să plasăm o virgulă în mijlocul unui cuv,ânt, pentru că îl transformăm într-un nonsens.

Matematicianul indian din secolul al XII-lea Bhaskara, călcând pe urmele lui Brahmagupta, s-a aplecat asupra împărțirii la 0 și a sugerat că un număr împărțit la 0 dă ca rezultat infinit. O sugestie rezonabilă, pentru că, dacă împărțim un număr la un număr foarte mic, rezultatul este foarte mare. De exemplu, 7 împărțit la o zecime este 70, iar împărțit la o sutime dă rezultatul 700. Pe măsură ce numitorul devine din ce în ce mai mic, rezultatul devine din ce în ce mai mare. La minimul absolut, 0 însuși, răspunsul ar trebui să fie infinit. Acest raționament ne pune însă în situația de a explica un concept și mai bizar – și anume infinitul. Confruntarea cu infinitul nu este de folos; infinitul (cu notația lui standard ∞) nu se conformează regulilor uzuale ale aritmeticii și nu este un număr în sensul obișnuit al cuvântului.

Dacă 7/0 reprezintă o problemă, ce se poate face cu și mai bizarul 0/0? Dacă $0/0 = c$, prin înmulțire pe diagonală ajungem la ecuația $0 = 0 \times c$ și la faptul că $0 = 0$. Aceasta nu este cine știe ce descoperire, dar nici un nonsens nu este. De fapt, c ar putea fi orice număr și nu ajungem într-o situație imposibilă. Ajungem la concluzia că 0/0 poate fi egal cu orice; în cercurile matematicienilor este denumit politicos „nedeterminat".

După toate acestea, ajungem la concluzia că, atunci când este vorba despre împărțirea la zero, mai bine excludem operațiunea din modul în care facem calculele. Aritmetica se descurcă foarte bine și fără ea.

LA CE FOLOSEȘTE ZERO?

Pur și simplu, nu ne-am putea descurca fără 0. Progresul științei a depins de el. Vorbim despre zero grade longitudine, zero grade pe scala temperaturilor, despre energie zero și gravitate zero. A intrat și în limbajul non-științific, cu expresii precum ora zero sau toleranță zero.

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

Ar putea fi folosit însă și mai mult. La New York, dacă pășiți de pe trotuarul 5th Avenue în Empire State Building, ajungeți în magnificul hol de intrare de la Etajul 1. Aceasta folosește capacitatea numerelor de a ordona, 1 pentru „primul", 2 pentru „al doilea" și tot așa până la 102. În Europa există și un Etaj 0, dar sunt rețineri în a-l numi astfel.

Matematica nu ar putea să funcționeze fără zero. Acesta se află în centrul conceptelor matematice care fac sistemul de numerație, algebra și geometria să funcționeze ca un tot. În șirul numerelor, 0 este numărul care separă numerele pozitive de cele negative și ocupă, așadar, o poziție privilegiată. În sistemul zecimal, zero servește ca substituent care ne permite să folosim atât numere uriașe, cât și unele microscopice.

De-a lungul câtorva sute de ani, zero a ajuns să fie acceptat și utilizat, devenind una dintre cele mai importante invenții ale omului. Matematicianul american din secolul al XIX-lea G.B. Halsted a adaptat un fragment din *Visul unei nopți de vară*, de Shakespeare, pentru a-l descrie ca motor al progresului care dă „iluzoriului nimic nu doar un loc anume și un nume, o imagine, un simbol, ci o putere utilă, caracteristică rasei hinduse din care s-a născut".

Când a fost introdus, 0 trebuie să fi părut ciudat, dar matematicienii au obiceiul de a se ataşa de concepte stranii, care se dovedesc utile mult mai târziu. Echivalentul din zilele noastre îl găsim în teoria mulțimilor, unde conceptul de mulțime înseamnă o colecție de elemente. În această teorie, ϕ desemnează mulțimea fără nici un element, așa-numita „mulțime vidă". Această idee poate să ni se pară ciudată, dar, la fel ca 0, este indispensabilă.

Totul despre nimic

Suma dintre zero și un număr pozitiv este pozitivă

Suma dintre zero și un număr negativ este negativă

Suma dintre un număr pozitiv și unul negativ este diferența lor; sau, dacă numerele sunt egale, rezultatul este zero

Zero împărțit la un număr negativ sau pozitiv fie este zero, fie este exprimat ca fracție cu zero la numărător și cantitatea finită la numitor

Brahmagupta, 628 d.Hr.

Idee de bază
nimicul contează.

Respect pentru oameni și cărți

02 Sisteme de numerație

Un sistem de numerație este o metodă de a aborda conceptul de „cât de mulți". Diferite civilizații, în diferite perioade de timp, au adoptat metode diferite, mergând de la elementarul „unu, doi, trei, multe" până la extrem de sofisticata notație zecimală pozițională pe care o folosim astăzi.

Sumerienii și babilonienii, care locuiau în urmă cu 4 000 de ani pe teritoriul ocupat astăzi de Siria, Iordania și Irak, foloseau în practica lor de zi cu zi un sistem pozițional. Îl numim pozițional pentru că poți exprima „numărul" prin poziționarea unui simbol. De asemenea, ei foloseau 60 ca unitate de bază – ceea ce numim astăzi un sistem „de bază 60". Vestigiile bazei 60 ne urmăresc și acum: 60 de secunde într-un minut, 60 de minute într-o oră. Când măsurăm unghiuri, considerăm și acum că unghiul la centru corespunzător unui cerc are 360°, în pofida încercării sistemului metric de a-l face de 400° (astfel încât unghiul drept să aibă 100°).

Dacă strămoșii noștri din Antichitate aveau nevoie de numere pentru scopuri practice, există dovezi că aceste culturi primitive erau preocupate și de matematică în sine și că, pe lângă ocupațiile lor practice, își făceau timp să o studieze. Aceste explorări includeau ceea ce am putea numi „algebră", precum și proprietățile figurilor geometrice.

Sistemul egiptean din secolul al XIII-lea î.Hr. folosea baza 10 cu un sistem de semne hieroglifice. Remarcabil este că egiptenii au dezvoltat un sistem pentru a opera fracții, dar notația pozițională zecimală pe care o folosim astăzi vine de la babilonieni, rafinată mai târziu de hinduși. Avantajul este că ea poate fi folosită pentru a exprima și numere foarte mici, și numere foarte mari. Folosind doar numeralele indo-arabe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9, se pot face calcule cu o oarecare ușurință. Ne convingem de aceasta aruncând o privire la sistemul folosit de romani. Era adecvat necesităților lor, însă numai bunii cunoscători ai sistemului erau capabili să facă și calcule cu el.

CRONOLOGIE

30 000 î.Hr.
Populațiile paleolitice din Europa fac semne numerice pe oase.

2000 î.Hr.
Babilonienii folosesc simboluri pentru numere.

600 d.Hr.
Predecesorul sistemului nostru modern de notație zecimală este folosit în India.

libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

SISTEMUL ROMAN

Simbolurile de bază folosite de romani erau „zecile" (I, X, C și M) și „jumătățile" acestora (V, L și D). Aceste simboluri erau combinate ca să formeze altele. S-a sugerat că folosirea lui I, II, III și IIII derivă din imaginea degetelor noastre, V din forma mâinii, iar prin inversarea acestuia din urmă și unirea celor două ca să formăm X obținem două mâini, sau 10 degete. C vine de la *centum* și M de la *mille*, o sută, respectiv o mie în latină. Romanii foloseau, de asemenea, S pentru „o jumătate" și un sistem de fracții cu baza 12.

Sistemul roman folosea oarecum o metodă „înainte și după" pentru producerea simbolurilor de care era nevoie, dar se pare că nu a fost uniform adoptată. Romanii din Antichitate preferau să scrie IIII, forma IV fiind introdusă doar mai târziu. Combinația IX era folosită și ea, se pare, dar un roman care vedea scris SIX ar fi înțeles 8½! Vedeți mai sus numerele *de bază* ale sistemului roman, cu unele adăugiri din epoca medievală.

Sistemul de numerație roman

Imperiul Roman	adăugiri medievale
S o jumătate	
I unu	
V cinci	$\bar{V}$ cinci mii
X zece	$\bar{X}$ zece mii
L cincizeci	$\bar{L}$ cincizeci de mii
C o sută	$\bar{C}$ o sută de mii
D cinci sute	$\bar{D}$ cinci sute de mii
M o mie	$\bar{M}$ un milion

Folosirea numeralelor romane nu este deloc ușoară. De exemplu, înțelesul lui MMMCDXLIIII devine clar doar când se introduc mintal paranteze, iar atunci (MMM)(CD)(XL)(IIII) se citește ca 3000 + 400 + 40 + 4 = 3444. Dar încercați să adunați MMMCDXLIIII + CCCXCIIII. Un roman priceput în această artă ar cunoaște diferite scurtături și șmecherii, dar nouă ne este greu să obținem răspunsul corect fără să calculăm mai întâi în sistemul zecimal și să convertim rezultatul înapoi, în notația romană:

Adunarea

3444	→	MMMCDXLIIII
+ 394	→	CCCXCIIII
= 3838	→	MMMDCCCXXXVIII

Înmulțirea a două numere este mult mai dificilă și ar putea fi chiar imposibilă în cadrul sistemului de bază, până și pentru un roman! Ca să facem înmulțirea 3444 × 394 avem nevoie de adăugirile medievale.

1200

Se răspândește sistemul indo-arab de scriere a numerelor 1,..., 9 și 0.

1600

Simbolurile sistemului zecimal iau formele moderne pe care le cunoaștem astăzi.